УДК 338

Олійник В.М.

ОПТИМІЗАЦІЯ ПРОЦЕСУ СПОЖИВАННЯ ПРОДУКТУ ФІНАНСОВИМИ ПОСЕРЕДНИКАМИ

В статті розглянута трьохперіодна модель економіки з одним узагальненим продуктом. Використання одиниць продукції може здійснюватися в різні моменти часу і носить випадковий характер. В якості критерію оптимізації виступає функція корисності. Знайдене оптимальне рішення показує розподіл частин одиниць продукції в різні моменти часу. Наводяться деякі чисельні результати.

Вступ

В даній роботі розглянуто доволі проста модель діяльності фінансових посередників на ринку споживання продуктів. Під фінансовими посередниками будемо розуміти економічних агентів, які спеціалізуються на продажу та придбанні фінансових контрактів та цінних паперів. В реальній економіці, при трансформації активів, виникає необхідність в залученні посередників як фінансових агентів. В роботах відомих вчених банки розглядаються як економічні інститути, які можуть здійснювати трансформацію фінансових активів. В рамках моделей що розвивають мікроекономічну теорію банків, модна виділити три принципових направлення :

- розглядаються моделі банків в якості сукупних фондів, які забезпечують захист своїх клієнтів від випадкових ринкових коливань;
- банки складають коаліцію власників інформації. Це направлення особливо актуальне, коли тільки окремі позичальники володіють інформацією про проект в який припускається інвестувати вкладення;
- банки - це посередницькі фірми, яким клієнти в випадку ефекту зростання прибутку від масштабу діяльності, делегують функції контролю (моніторингу) за поведінкою підприємців, в проекти яких вони зробили інвестування.

Постановка задачі

Розглянемо абстрактну модель трьохперіодної економіки $(t_i, i = 0,1,2)$ з одним умовним узагальненим продуктом [2]. Припустимо, що агент має одну одиницю продукту, долі від якого (I_i) він може використовувати в моменти часу t_i з ймовірністю μ_i відповідно. Прибуток від інвестування в деякий проект в випадку раннього споживання (до завершення проекту) дорівнює $П_1$, а в випадку пізнього споживання (після завершення проекту) - $П_2$. В початковий момент часу прибуток дорівнює $П_0$. Таким чином в різні моменти часу маємо наступний прибуток:

$$П_i = \mu_i I_i L_i \tag{1}$$

де L_i - прибуток одиниці продукту в момент часу t_i .

Кількість одиниць продукту можна знайти за формулою:

$$C_i = П_i / L_i \tag{2}$$

Ефект від споживання продукту агентом може вимірюватись за допомогою загальної функції корисності $U(C)$, яка передбачається опуклою та зростаючою. Припустимо, що вибір агентом типу споживання відбувається під впливом причин, що мають випадкових характер. Тоді математичне сподівання загальної корисності споживання продукту агентом може бути знайдено за формулою:

$$U(C_0, C_1, C_2) = \sum_{i=0}^{2} \mu_1 \rho_i U(C_i) \tag{3}$$

де ρ_i - коефіцієнт дисконтування.

Таким чином оптимізація розподілу продукту фінансовими посередниками (агентами) з точки зору їхньої корисності, зводиться до рішення наступної задачі:

максимізація цільової функції (3) при обмеженнях

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{2} I_i = 1 \\ \sum_{i=0}^{2} \mu_i = 1 \\ C_i, \rho_i, \mu_i \geq 0 \end{cases} \tag{4}$$

Рішення задачі. Задачу максимізації функції корисності споживання продукту, при обмеженнях (4), можна звести до знаходження екстремуму функції однієї змінної. В більш ширшому випадку (коли наявно не можливо виразити одну змінну відносно другої), для рішення задачі можна використовувати функцію Лагранжа у вигляді [1]:

$$F = \sum_{i=0}^{2} \mu_i \rho_i U(C_i) - \lambda(\sum_{i=0}^{2} I_i - 1) \tag{5}$$

де λ - множник Лагранжа.

Умова екстремуму функції Лагранжа (5) зводиться до співвідношень:

$$\begin{cases} \rho_1 \mu_1^2 U'(C_1) = \rho_2 \mu_2^2 U'(C_2) \\ \sum_{i=0}^{2} C_i / \mu_i = 1 \end{cases} \tag{6}$$

Деякі результати.

В якості прикладу функцію корисності можна взяти у вигляді функції типу Неймана-Моргенштерна:

$$U(C) = 1 - \exp(-aC) \quad (a = const,\ a > 0) \tag{7}$$

Рішення системи (6) з урахуванням (7) має вигляд:

$$\begin{cases} C_1 = C_2 - \ln[(\rho_2 \mu_2^2)/(\rho_1 \mu_1^2)]/a \\ C_2 = [(1 - C_0/\mu_0) + \mu_1 \ln([(\rho_2 \mu_2^2)/(\rho_1 \mu_1^2)]/(a\mu_1]/(1/\mu_1 + 1/\mu_2) \end{cases} \tag{8}$$

Умова невід'ємності кількості одиниць продукції виявляється у вигляді обмежень на коефіцієнти дисконтування:

$$\exp[-a\mu_1(1-I_0)] \le (\rho_2\mu_2^2)/(\rho_1\mu_1^2) \le \exp[a\mu_2(1-I_0)] \quad (9)$$

Розглянемо деякі поодинокі випадки.

A. Агент інвестує тільки долю продукту I_1 в момент часу t_1 до завершення проекту, а доля $I_2 = 0.$ Математично задача має наступне рішення:

$$\begin{cases} C_0 = C_1 - \ln[(\rho_1\mu_1)/(\rho_0\mu_0)]/a \\ C_1 = \{1+\ln[(\rho_1\mu_1^2/(\rho_0\mu_0^2)]/(a\mu_0)\}/(1/\mu_0 + 1/\mu_1) \end{cases} \quad (10)$$

Умова невід’ємності C_0 та C_1 зводиться до наступних обмежень на коефіцієнти дисконтування:

$$\exp(-a\mu_0) \le (\rho_1\mu_1^2)/(\rho_0\mu_0^2) \le \exp(a\mu_1) \quad (11)$$

B. Агент інвестує долю продукту I_1 в момент раннього споживання, а частину продукту що залишилась $I_2 = 1 - I_1$, в момент часу пізнього споживання t_2. Оптимальне рішення має вигляд (8) при обмеж1енні на коефіцієнти дисконтування (9), якщо $C_0 = 0$.

C. Агент від загальної долі забирає частину продукту I, яку може інвестувати в проект в момент часу t_1 з ймовірністю μ_1 або в момент t_2 з ймовірністю μ_2. З урахуванням обмежень маємо:

1. якщо $\mu_0 = 1$, $I = 0$, тобто агент не інвестує проект та отримує прибуток Π_0 з інших джерел;

2. якщо $\mu_0 = 0$, $I = 1$, тобто агент всю долю продукту інвестує в проект і отримує прибуток Π_1 з ймовірністю μ_1, а прибуток Π_2 з ймовірністю μ_2. В даному випадку задача (3)-(4), зводиться до знаходження локальних екстремумів із співвідношення

$$\frac{dU(C_1, C_2)}{d\mu_1} = 0 \quad (12)$$

Якщо:

- $\rho_1 = \rho_2$, то $\max U(\mu_1) = U(O) = U(1)$
- $\rho_1 < \rho_2$, то $\max U(\mu_1) = U(O)$
- $\rho_1 > \rho_2$, то $\max U(\mu_1) = U(1)$

Чисельні результати.

Випадок ***C***. В якості чисельної реалізації розглянемо графік функції корисності

$$U(\mu_1) = \mu_1\rho_1(1-\exp(-a\mu_1) + (1-\mu_1)\rho_2(1-\exp[-a(1-\mu_1)] \quad (13)$$

при різних значеннях параметрів a, ρ_1, ρ_2 .

На рис.1,2 наведено залежність функції (13) при $\rho_1 = \rho_2 = 1$ та $\rho_1 = 1,\ \rho_2 = 0{,}9$ відповідно.

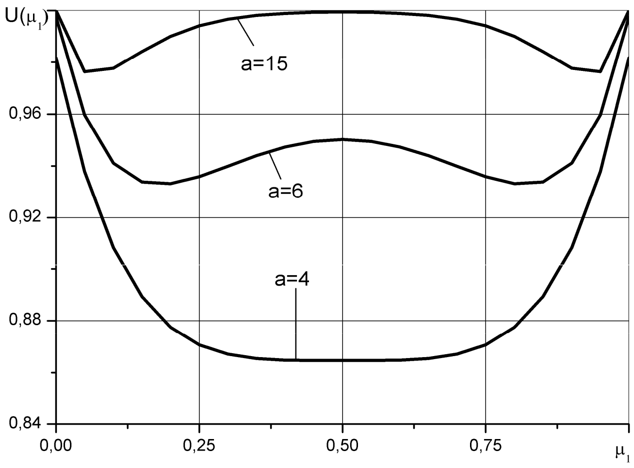

Рис.1. Розподіл $U(\mu_1)$ при $\rho_1 = 1; \rho_2 = 1$

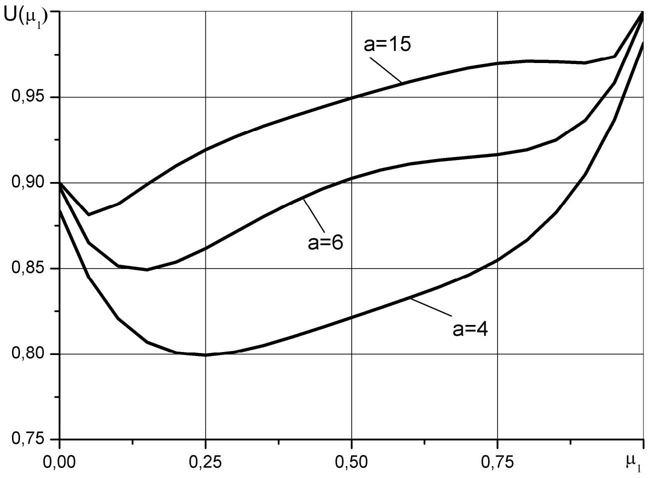

Рис.2. Розподіл $U(\mu_1)$ при $\rho_1 = 1; \rho_2 = 0{,}9$

Згідно рис.1 локальні екстремуми при $a = 6$ знаходяться із співвідношення (12) і відповідають значенням $\mu_1^{*} = 0{,}18$; $\mu_1^{**} = 0{,}5$; $\mu_1^{***} = 0{,}82$.

Випадок **В**. Функція корисності має вигляд

$$U(C_1; C_2) = \sum_{i=1}^{2} \mu_i \rho_i [1 - \exp(-aC_i)] \tag{14}$$

де C_1, C_2 знаходяться із (8). На рис.3 наведено розподіл часток одиниці товару I_1, I_2, які максимізують функцію корисності (14) при значеннях $a = 7; \rho_1 = 0{,}9; \rho_2 = 0{,}8$.

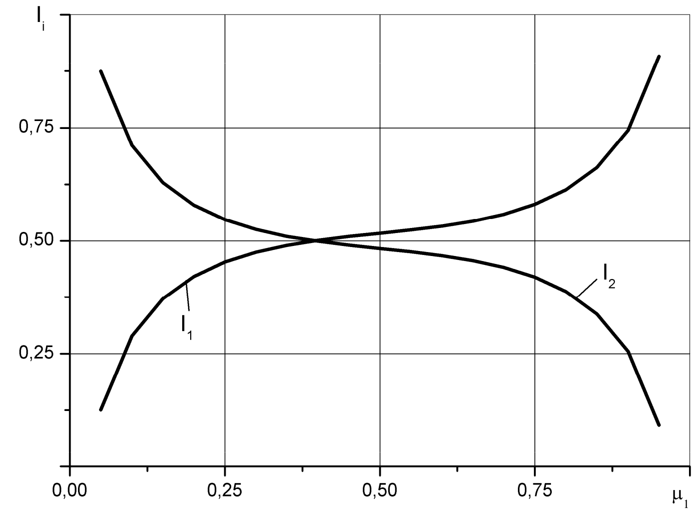

Рис.3. Розподіл часток продукту I_i

На рис.4 показано розподіл функції корисності (14) з обмеженнями типу (4) при $\rho_1 = 0{,}9; \rho_2 = 0{,}8$ та різних значеннях параметру a .

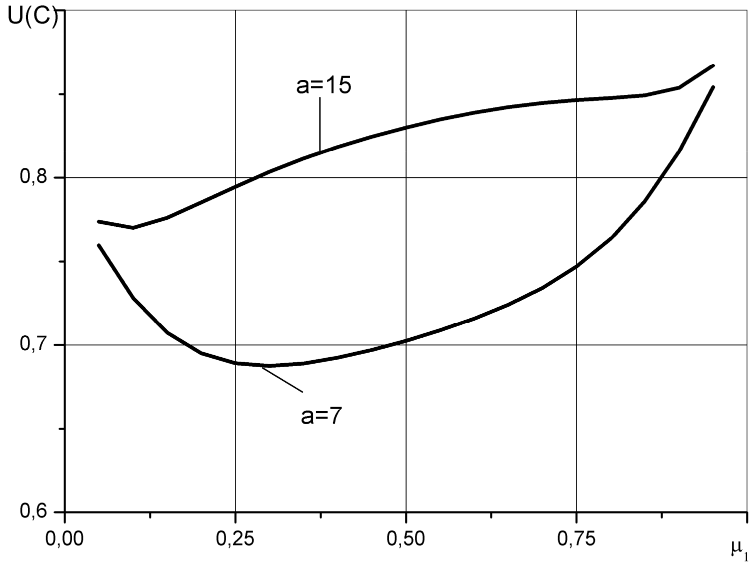

Рис.4. Розподіл функції корисності $U(C)$

Висновок. Отримані результати дають можливість зробити висновок, що оптимальний розподіл кількості одиниць продукції в різні моменти часу t_i , який максимізує функцію корисності, залежить від відповідних ймовірностей їх застосування та накладає деякі обмеження на коефіцієнти дисконтування. Коефіцієнти дисконтування відображають різні етапи завершення всього проекту і обмеження на них можна пов'язати з ймовірністю інвестування (чи не інвестування) частин загального продукту в різні моменти часу.

Л і т е р а т у р а

1. Дослідження операцій в економіці: Підручник / За ред. І.К.Федоренка, О.І.Черняка. -К.: Знання, 2007. -558с.
2. Bryant J. A model of reserves, bank runs and deposit insurance //Journal of Banking and Finance, vol.4. pp.335-344, 1980.